数理解析研究所講究録
134巻 1972年 63-80

抽象的微分方程式の摂動について

早大 理工 実方宣洋

§1. 序

(B) - space X における線型作用素 A について，次の X における常微分方程式の初期値問題が考えられる。

(1) $\quad du(t)/dt = Au(t) \qquad u(0) = u_0$

ここで扱う問題は，(1) が適当な意味で解ける場合，線型作用素 B にどれ位の条件を与えたならば，初期値問題

(2) $\quad du(t)/dt = (A+B)u(t) \qquad u(0) = u_0$

が解けるかという事になる。

問題(1)が (C_0) well posed (又は，(1 A) well posed) となる場合について，R. S. Phillips ([2]) による研究があり，I. Miyadera [3] ではさらにこれらの問題が，

(I) Bが有界作用素のときの perturbation

(II) semi group 列の收束性

とに分解される事を示した。問題(II)については(C_0) s.gr. に対して，H. F. Trotter [10] の研究があり，(1A) s.gr. については I. Miyadera [3]，(0A)及び(A) s.gr. に対しては S. Oharu and H. Sunouchi [5]，さらに$(C_{(k)})$ s.gr. に対して，T. Takahashi and S. Oharu [9] により拡張された。

問題(II)が拡張されているのであるから，問題(I)がいえれば同様な形の perturbation がいえるであろうが，(I)が(0A) well posed の場合すでに否定的である事を例で示す。しかし(I)は弱い形では成立する。§2. ではこの二つの事について述べる。§3では I. Miyadera [4] の結果の一部分を紹介する。§4では解作用素列の収束性について調べ，perturbation の問題に適用する。§5では§4で得られた結果を基に幾つかの事柄について調べた。

§2. 問題(I)について

初期値問題(1)が(0A) well posed となる場合について例を考える。Differential operator

$$P(D) = \begin{pmatrix} -D^2 + iD^4 & D^4 \\ 0 & -D^2 + iD^4 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

を $L_2 = L_2(R_1) \times L_2(R_1)$ で考える。D を通常の意味にと

ると，$P(D)$ は preclosed であるがこの closure (the minimal operator) と D を distribution の意味で考えた operator (the maximal operator) とは一致するから，$A=\overline{P(D)}$ と書けば，$D(A)=\{u\in L_2\ ;\ P(\xi)\hat{u}(\xi)\in L_2\}=H_4\times H_4$ ここで $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ $\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$

この operator A に対して，Cauchy problem (1) は (0 A) well posed となる事が知られている (H. Sunouchi [8])。

Cauchy problem (2) における operator B として次のものを考える。

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

B は L_2 の有界作用素で，(2) は Fourier 変換により，形式的に，

$$(2)'\qquad \begin{aligned} d\hat{u}(t\ \xi)/dt &= P(\xi)\hat{u}(t\ \xi)+B\hat{u}(t\ \xi)\\ \hat{u}(0\ \xi) &= \hat{u}_0(\xi)\end{aligned}$$

となる。Operator $Q(D)=A+B$ の resolvent を調べるため，matrix $\lambda I-Q(\xi)$ の逆を計算すれば，

(i) $\det(\lambda-Q(\xi))=\left(\lambda-(\sqrt{\varepsilon}-1)\xi^2-i\xi^4\right)\cdot\left(\lambda+(\sqrt{\varepsilon}+1)\xi^2-i\xi^4\right)$

(ii) $(\lambda-Q(\xi))^{-1}=1/\det(\lambda-Q(\xi))\cdot\begin{pmatrix}\lambda+\xi^2-i\xi^4 & \xi^4\\ \varepsilon & \lambda+\xi^2-i\xi^4\end{pmatrix}$

となり，もしも $\varepsilon>1$ ならば $Q(\xi)$ の固有値 $\lambda(\xi)=(\sqrt{\varepsilon}-1)\xi^2$

$+i\xi^4$ は Petrowsky の条件（[11] p.101）を満たさず s. gr. well posed ではない（H. Sunouchi [8]）。しかし作用素 $Q(D)$ は，最近発表された J. Chazarain [1] による Gevery class の distribution の意味では well posed となる。実際 $Q(D)$ の resolvent set $\rho(Q)$ は，(ii) より $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \,;\, \mathrm{Re}\lambda \geq a|\lambda|^{1/d} + b\}$，$1<d\leq 2$，$a=\sqrt{\varepsilon}-1$，$b$：十分大，ならば，$\sup_{\xi}|(\lambda - Q(\xi))^{-1}| < \infty$ となる事から $\rho(Q) \supset \Lambda$。又 (ii) より容易に $\sup_{\xi}|(\lambda - Q(\xi))^{-1}| \leq \mathrm{Const.}(1+|\lambda|)^2$，$\lambda \in \Lambda$ を示す事も出来，[1] THÉORÈME 4.4. を適用できる。一方 [1] の摂動に関する定理，THÉORÈME 6.2.，は作用素 $A = \overline{P(D)}$ が被摂動作用素に対する仮定，(DÉFINITION 6.1.)，$\rho(A) \supset \{\lambda \,;\, \mathrm{Re}\lambda > \omega\}$ & $\|R(\lambda \,;\, A)\| \leq M/\mathrm{Re}\lambda$，を満たさないため，適用できない。

上記の例により問題(I)は否定的であるが，(1)における作用素 A を class $G_2(\omega, k)$ に属すると仮定して，問題(I)を弱い形で試みる。

定義 2.1.　(B)-space X における closed linear operator A が，条件

(I ω)　$\rho(A) \supset \{\xi \in K \,;\, \xi > \omega\}$

$$(\mathrm{II}\,k)\quad \|R(\xi:A)^m x\| \leq M/(\xi-\omega)^m \cdot \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|$$

$$x \in D(A^k),\ \xi > \omega,\quad m = 1, 2, \cdots$$

を満たすとき A は $G_2(\omega\ k)$ に属すという。

$A \in G_2(\omega\ k)$ ならば，これから解作用素 $\{T(t;A)\}_{t>0}$ が構成される。詳細は［6］に示されている。又 $D(A^k)$ は norm $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \|A^j\cdot\|$ により (B) space $[D(A^k)]$ となる。

命題 2.2.　　$A \in G_2(\omega, k)$，$B \in \mathcal{B}(X:[D(A^k)])$ ならば，ある実数 ω_1 が存在して，$A+B \in G_2(\omega_1\ k)$。さらに $D(A)$ が X で dense ならば $A+B$ により構成される解作用素 $\{T(t;A+B)\}_{t>0} \subset \mathcal{B}([D(A^k)]\ X)$ は，

$$T(t;A+B)x = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(t)x \qquad x \in D(A^k)$$

$$S_0(t)x = T(t;A)x \qquad (A\text{の解作用素})$$

$$S_{\nu+1}(t)x = \int_0^t T(t-s:A)BS_\nu(s)x\,ds$$

$$= \int_0^t S_\nu(t-s)BT(s:A)x\,ds$$

と表現できる。

命題 2.2. を示すため, $\xi-A-B=(\xi-A)(I-R(\xi\ A)B)$ $=(I-BR(\xi\ A))(\xi-A)$ と書くと,

$$\|R(\xi\ A)Bx\| \leq M/\xi-\omega\ \|B\|_{(k)}\|x\| \qquad x\in X$$

$\|\cdot\|_{(k)}$ は, $\mathcal{B}(X\ D(A^k))$ の operator norm

より (B) space X で $(I-R(\xi\ A)B)^{-1}$ を Neumann 展開する事により $A+B$ に対して $(I\ \omega_1)$, $\omega_1=\omega+M\|B\|_{(k)}$ が示される。 $(\mathrm{II}\ k)$ を示すためには,

$$\|BR(\xi\ A)x\|_{D(A^k)} \leq M/\xi-\omega\ \|B\|_{(k)}\|x\|_{D(A^k)}$$

$$x\in D(A^k)$$

より (B) space $[D(A^k)]$ 上で $(I-BR(\xi\ A))^{-1}$ を Neumann 展開すれば,

$$R(\xi\ A+B)x=R(\xi\ A)\sum_{\nu=0}^{\infty}(BR(\xi\ A))^{\nu}x \qquad x\in D(A^k)$$

このべキを [2] に従って計算すると,

$$\|R(\xi\ A+B)^m x\| \leq M/(\xi-\omega_1)^m\ \|x\|_{D(A^k)}$$

$$x\in D(A^k) \qquad \xi>\omega_1 \qquad m=1,2,\cdots$$

ところで $(\mathrm{II}\ k)$ を示すためには上の評価式の右辺は $\|\cdot\|_{D(A^k)}$ ではなく $\|\cdot\|_{D(A+B)^k}$ でなければならない。そこで次の補題が必要である。

補題 2.3. A を $D(A)$ で定義された線型作用素, B を X から normed space $[D(A^k)]$ への有界作用素とすると,

$$D(A^j) = D((A+B)^j) \qquad j = 1, 2, \cdots, k+1$$

$$C^{-1}\|x\|_{D(A^j)} \leq \|x\|_{D(A+B)^j} \leq C\|x\|_{D(A^j)}$$

$$x \in D(A^j), \quad C>0 \text{ 定数}, \qquad j=1, 2, \cdots, k$$

が成立する。

この補題は帰納法で証明される。以上の事により命題 2.2. は証明される。

§3. 解作用素の構成について

この節では I. Miyadera [4] による一般的な解作用素の構成定理を紹介する。

X を (B)-space としてその *norm* を $\|\cdot\|$, Y を X の subspace で, $\|\cdot\|$ よりも強い *norm* $|||\cdot|||$ により (B)-space となるものとする。A を X の中の *linear operator* とするとき, Y の subspaces $Y_A, Y_{A^2}, \cdots Y_{A^n} \cdots$ を次の様に定める。

$$Y_A = \{ x \in D(A) \cap Y \ ; \ Ax \in Y \}$$

$$Y_{A^2} = \{ x \in Y_A \ ; \ Ax \in Y_A \}$$

$$\cdots$$

$$Y_{A^n} = \{ x \in Y_{A^{n-1}} \ ; \ Ax \in Y_{A^{n-1}} \}$$

$$\cdots$$

AをY_Aへ制限したものをA_0と書けば，$Y_A = D(A_0)$，
$Y_{A^2} = D(A_0^2)$，… $Y_{A^n} = D(A_0^n)$ …。

Aに次の仮定を置く。

(a_1) Yの中の作用素として，A_0はresolvent set，
$\rho(A_0)$を持ち，

$$\rho(A_0) \supset \{\xi\ ;\ \xi > \omega\}$$

(a_2) Yの中の作用素A_0のresolvent $R(\lambda) = R(\lambda, A_0)$
は，$\| R(\lambda)^m x \| \leq M/(\lambda-\omega)^m \||x\||$

$x \in Y$，$\lambda > \omega$，$m = 1, 2, \cdots$

を満たす。

(a_1)，(a_2)を満たす作用素Aに対して，

$$T_\lambda(t)x = e^{-\lambda t}\sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda t)^\nu (\lambda R(\lambda))^\nu x \,/\, \nu!$$

$$\lambda > \omega \qquad t \geq 0 \qquad x \in Y$$

と置く。級数は$\|\cdot\|$ normにより収束する。又収束は$\lambda > \omega$
$t \geq 0$に対してcompact一様収束。

命題 3.1. 作用素Aに条件(a_1) (a_2)を仮定すると
次の事が成立する。

(b_1) $T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x$，$x \in Y_{A^2}$
が存在する。収束は$t \geq 0$に対してcompact一様
収束。

(b_2) $\| T(t)x \| \leq M e^{\omega t} \||x\||$ $\qquad x \in Y_{A^2} \qquad t \geq 0$

(b₃) $\|T(t)x - T(s)x\| \le M/\omega \cdot |e^{t\omega} - e^{s\omega}| \cdot \|Ax\|$

$x \in \mathcal{Y}_{A^2} \qquad t, s \ge 0$

$(b_4)'$ $\quad T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_\lambda(s) Ax \, ds$

$x \in \mathcal{Y}_{A^2} \qquad t \ge 0$

(b_4) $\quad T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax \, ds$

$x \in \mathcal{Y}_{A^3} \qquad t \ge 0$

(b_5) $\quad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$

$\lambda > \omega \qquad x \in \mathcal{Y}_{A^2}$

ここでさらに条件

(a_3) $\quad A$ は X の中の閉作用素

を付け加えると。

$(b_6)'$ $\quad AT_\lambda(t)x = T_\lambda(t)Ax \qquad x \in \mathcal{Y}_A$

(b_6) $\quad AT(t)x = T(t)Ax \qquad x \in \mathcal{Y}_{A^3}$

［(b_1) の証明の概略］ $\quad T_\lambda(t)x$ を λ について微分すれば,

$$\partial/\partial\lambda \, T_\lambda(t)x = -te^{-\lambda t} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda t)^\nu (\lambda R(\lambda))^\nu R(\lambda)^2 A^2 x / \nu!$$

$$x \in \mathcal{Y}_{A^2}$$

これより

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \le \int_\mu^\lambda \|\partial/\partial\nu \, T_\nu(t)x\| \, d\nu$$

$$\leq t \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mu}^{\lambda} e^{-\nu t} \|(\nu t)^k (\nu R(\nu))^k R(\nu)^2 A^2 x\| / k! \, d\nu$$

$$\leq Mt \int_{\mu}^{\lambda} 1/(\lambda-\omega)^2 \ \exp(\nu t\omega/\nu-\omega) \, d\nu \ \|A^2 x\|$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \text{as} \quad \lambda, \mu \longrightarrow \infty$$

ここで $Y = [D(A^k)]$ と置けば，$G_2(\omega\, k)$ に属する作用素に対する解作用素が $D(A^{k+2}) = Y_{A^2}$ の上で構成される事に注意しておく（[6] では $D(A^{2k+1})$ の上で構成された）。尚 [4] ではさらに鋭く，$D(A^{k+1})$ の上で構成されている。

次に subspace Y_{A^j} へ norm $|||\cdot|||_j = \sum_{i=0}^{j} |||A^i \cdot|||$ を導入して (B) space としよう。次の補題が成立する。

補題 3.2.　　A が Y の中の作用素として resolvent set を持つとする。もしも Y_A が $|||\cdot|||$-dense in Y ならば，Y_{A^n} は $|||\cdot|||_k$-dense in Y_{A^k}，$n \geq k \geq 0$ 。

この補題から，

命題 3.3.　　仮定 (a_1)，(a_2) にさらに仮定

(a_4)　Y_A は $|||\cdot|||$-dense in Y

を加えると次の事が成立する。

(b_1)，(b_2) は $x \in Y$ で成立。

$(b_3)'$　$T(t)x$ は $|||\cdot|||$-continuous in $t \geq 0$。$x \in Y$

(b_4) は $x \in Y_A$，又 (b_5) は $x \in Y$ で成立。
ここでさらに条件 (a_3) を仮定すると
(b_6) は $x \in Y_A$ で成立。

以上の結果を基に，命題2.2.と同様な結果が成立する。ここでは補題2.3.は必要としない。

［命題2.2］′　作用素Aが条件 $(a_1)(a_2)$ を満たすとする。$B \in \mathcal{B}(X;Y)$ ならば $A+B$ も条件 $(a_1)(a_2)$ を満たす。さらにAが条件 (a_4) を満たせば，$A+B$ も (a_4) を満たし，$A+B$ により構成された解作用素は命題2.2 の表示で書ける。又Aが (a_3) を満たせば $A+B$ も (a_3) を満足する。

§4. Perturbing operator の近似

§3.の結果を基に，解作用素列の収束性の問題について考える。次の命題が成立する。

命題 4.1.　線型作用素の列 $\{A_n\}$ を一定の実数 ω により条件 (a_1) を満たすものとする，$\rho(A_n|_0) \supset \{\xi > \omega\}$。さらに条件

(C_1)　ある $\xi_0 > \omega$ とある $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(Y)$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \|| R(\xi_0 : A_n)x - R(\xi_0)x \|| = 0 \qquad x \in Y$$

$$\mathcal{N}(R(\xi_0)) = \{0\}$$

(C₂) $\sup_n |||R(\xi;A_n)||| < \infty \qquad \xi > \omega$

(C₃) ある正数 M が存在して,

$$\|R(\xi;A_n)^m x\| \leq M/(\xi-\omega)^m \|x\|$$

$$\xi>\omega, \quad x \in \Gamma, \quad n, m = 1, 2, \cdots$$

を仮定する。条件 $(a_1)(a_2)$ を満足する次の様な作用素 A が存在する。

(d_1) $$\lim_{n\to\infty} |||R(\xi;A_n)x - R(\xi;A)x||| = 0$$

$$\xi>\omega \qquad x \in \Upsilon$$

(d_2) $\{T(t;A)\}_{t>0}$, $\{T(t;A_n)\}_{t>0}$ をそれぞれ A, A_n より構成された解作用素とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \| T(t;A_n)R(\xi;A_n)^2 x - T(t;A)R(\xi;A)^2 x\| = 0$$

$$\xi>\omega, \quad x \in \Upsilon$$

さらに条件

(C_4) 各 Υ_{A_n} は $|||\cdot|||$-dense in Υ, 又 $R(R(\xi_0))$ も $|||\cdot|||$-dense in Υ。

を仮定すると, A は条件 (a_4) を満たし,

(d_3) $$\lim_{n\to\infty} \| T(t\ A_n)x - T(t\ A)x\| = 0 \qquad x \in \Upsilon$$

ここで perturbation の問題にもどり, 初期値問題 (1) を $(C_{(k)})$ well posed とする。作用素 A は $(C_{(k)})$ s.gr. $\{T(t,A)\}$ の c.i.g. である。([6], [9]) §3.に習って $\Upsilon = D(A^k)$

$\|\cdot\|_{D(A^k)} = |||\cdot|||$ と書く。次の条件を満足する作用素 B を考える。

(p_1)　　$D(B) \supset D(A^\infty) = \bigcap_{n\geq 1} D(A^n)$,　$B(D(A^\infty)) \subset Y$

(p_2)　作用素の列 $\{B_n\} \subset \mathcal{B}(X;Y)$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} |||B_n x - Bx||| = 0 \qquad x \in D(A^\infty)$$

(p_3)
$$\sup_n \int_0^1 |||B_n T(t;A)x|||\,dt < \infty \qquad x \in Y$$

命題 4.2.　　初期値問題 (1) を $(C_{(k)})$ *well posed* とする。作用素 B を条件 (p_1), (p_2), (p_3) を満たすものとするとき, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\forall\varepsilon$; $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ に対して, $A+\varepsilon B$ は (B)-space Y の中で閉包, $\overline{A+\varepsilon B}$, を持ち, $\overline{A+\varepsilon B}$ は条件 (a_1) (a_2), (a_4) を満たす。又

$$\lim_{n\to\infty} T(t;A+\varepsilon B_n)x = T(t;\overline{A+\varepsilon B})x \qquad x \in Y$$

が成立する。

§5.　*Miscellanies*

命題 4.2 における $A+\varepsilon B$ が仮定 (a_3) を満たすための条件を求める。

命題 5.1.　　命題 4.2 の仮定の基にさらに仮定

ある $\xi_0 \in \rho(A)$ が存在して, $BR(\xi_0, A) \in \mathcal{B}(X)$

を加えると, $\varepsilon_1 > 0$ が存在して $\forall\varepsilon$; $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ に対して, $D(A)$

上で定義されたXの中の作用素 $A+\varepsilon B$ は ξ_0 を resolvent set の中にふくみ，条件 $(a_1),(a_2),(a_3),(a_4)$ を満たす。

次に $\overline{A+\varepsilon B}$ が resolvent set $=\phi$ の場合の $G_2(\omega,1)$ ([7]) に属するための条件を調べる。補題2.3.と類似な結論が成立すればよい。

[補題 2.3]′　A を $D(A)$ で定義された作用素として，B を条件

$$D(B)\supset D(A),\quad \|Bx\|\le a\|x\|+b\|Ax\| \qquad x\in D(A),\ a\ge 0,\ 1>b\ge 0$$

を満足する作用素とすると，正数 $C>0$ が存在して，

$$C^{-1}\|x\|_{D(A)}\le\|x\|_{D(A+B)}\le C\|x\|_{D(A)}$$

が成立する。

最後に作用素 B が $(p_1),(p_2),(p_3)$ を満たすための条件を調べる。

命題 5.2.　初期値問題 (1) を (A) well posed と仮定する。作用素 A は (A) s.gr. $\{T(t;A)\}_{t>0}$ の c.i.g. である。作用素 B に次の仮定

(g_1)　$D(B)\supset D(A^\infty)$，　$B[D(A^\infty)]\subset D(A^2)$

(g_2)　ある $k_0\ge 0$，$\lambda_0\in\rho(A)$，$K>0$ が存在して，

$$\|BR(\lambda_0;A)^{k_0}x\|_{D(A^2)}\le K\|x\| \qquad x\in D(A^\infty)$$

(g_3) $\quad \int_0^1 \|BT(t;A)x\|_{D(A^2)} dt \leq K\|x\|_{D(A^2)} \qquad x \in D(A^\infty)$

を置くと，Bは条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。又 (1) が (0A) well posed と仮定した場合，仮定 $(g_1),(g_2),(g_3)$ において，$D(A^2) \longrightarrow D(A)$，$\|\cdot\|_{D(A^2)} \dashrightarrow \|\cdot\|_{D(A)}$，と置き換えれば同様な結論が成立する。

系 5.3. (1) を (0A) well posed と仮定して，閉作用素 B を，$D(B) \supset D(A)$，$B[D(A)] \subset D(A)$ を満足するものとすると，Bは条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。

文献

[1] J.Chazarain, Problèmes de Cauchy Abstraits et Applications à Quelques Problèmes Mixtes, J. Funct. Analysis 7, 386-446 1971.

[2] E. Hille & R.S. Phillips, Functional Analysis and Semi Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1957

[3] I. Miyadera, Perturbation theory for semi groups of linear operators, 数学 20 (1968) 14-25

[4] I. Miyadera, Generation theorems of semi groups of linear operators, to appear

[5] S. Oharu and H.Sunouchi, On the Convergence of semi groups of linear operators, J. Funct. Analysis, vol 6,

No 2, October 1970.

[6] S. Oharu, Semi groups of linear operators in a Banach space, to appear.

[7] N. Okazawa and S. Oharu, Abstract Cauchy problems and semi groups of linear operators, to appear.

[8] H. Sunouchi, Convergence of semi discrete difference schemes of abstract Cauchy problems, Tôhoku Mat. Journ, vol. 22, 394-408 1970

[9] T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semi groups, to appear.

[10] H. F. Trotter, Approximation of semi groups of operators, Pacific J. Math., 8 (1958) 887-919

[11] 山口昌哉, 野木達夫, 数値解析の基礎, 共立出版